VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STAVEBNÍ

MATEMATIKA I

MODUL BA01_M09, GA04_M03

REÁLNÁ FUNKCE DVOU A VÍCE PROMĚNNÝCH – I

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Cíle

V odpovídajících číselně vyjádřených odstavcích textu jsou stanoveny následující cíle:

2.1 Porozumět rozšíření pojmů funkce a graf funkce z jedné proměnné na dvě proměnné. Umět určit a zakreslit definiční obory funkcí dvou proměnných. Zopakovat si grafy nejzákladnějších ploch (parabolické, kuželové, kulové, eliptické) a umět vyjádřit jejich části jako grafy funkcí dvou proměnných.

2.2 Umět charakterizovat okolí bodu v $\mathbb{E}_2$, $\mathbb{E}_3$ a různé druhy množin v $\mathbb{E}_2$. Znát definice limity a spojitosti funkce, umět vypočítat jednoduché limity nebo ukázat, že limity neexistují. Zformulovat Weierstrassovu a Bolzanovu větu.

2.3 Umět nakreslit obrázek, charakterizující geometrický význam parciální derivace funkce dvou proměnných. Znát vyjádření parciální derivace užitím limity. Seznámit se se vztahem mezi existencí parciálních derivací a spojitostí funkce. Znát podmínku pro záměnnost parciálních derivací vyšších řádů.

2.4 Porozumět vztahům pro výpočet parciálních derivací složených funkcí a umět je ilustrovat na jednoduchých příkladech. Seznámit se s Lagrangeovou větou.

2.5 Znát geometrický význam totálního diferenciálu funkce dvou proměnných, umět vztahy pro výpočet totálních diferenciálů prvního a vyšších řádů. Seznámit se s využitím totálního diferenciálu při odhadech chyb. Znát předpoklady Taylorovy věty a umět určit Taylorovy polynomy pro funkce dvou proměnných.

1.2 Požadované znalosti

Pro potřeby zvládnutí tohoto modulu předpokládáme znalosti studentů v rozsahu modulu Matematika I, Moduly BA01_M04 , BA01_M05, BA01_M06.

1.3 Doba potřebná ke studiu

Čas potřebný ke zvládnutí tohoto modulu je odhadnut pro *průměrného studenta* jako hodnota nejméně 20 hodin.

1.4 Klíčová slova

funkce dvou proměnných, složená funkce, limita, spojitost, parciální derivace, totální diferenciál, Taylorova věta

Na konci modulu zařazen *Rejstřík*, ve kterém jsou další klíčová slova přehledně uspořádána i s odkazy na odpovídající stránky.

1.5 Metodický návod k práci s textem

Text je uspořádán podle stejných zásad, jako ostatní dříve studované moduly předmětu Matematika.

Kapitola 2

Funkce dvou a více proměnných

2.1 Pojem funkce dvou a více proměnných

Při studiu funkčních závislostí různých proměnných veličin v matematice, fyzice i technických předmětech, nevystačíme s reálnou funkcí jedné reálné proměnné a používáme proto funkce dvou, tří nebo více proměnných. Uveďme si některé konkrétní příklady takových funkcí :

- Délka strany c v obecném trojúhelníku je rovná $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = c(a, b, \gamma)$, kde a, b jsou délky zbývajících stran a γ je úhel, který tyto strany svírají.
- Obsah pláště komolého rotačního kužele je roven $S = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot s = S(r_1, r_2, s)$, kde r_1, r_2 jsou poloměry podstav kužele a s je délka jeho strany.
- Celková mechanická energie E tělesa o hmotnosti m, pohybujícího se rychlostí v ve výšce h nad povrchem země je rovna $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = E(m, v, h)$, kde g je velikost tíhového zrychlení.
- Mechanická práce tělesa, které urazí dráhu s působením konstantní síly o velikosti F, přičemž síla svírá s trajektorií tělesa stálý úhel α, je dána vztahem $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha = W(F, s, \alpha)$.
- Hydrostatický tlak p_h v hloubce h pod volným povrchem kapaliny o hustotě ρ je roven $p_h = h \cdot \rho \cdot g$, kde g je opět velikost tíhového zrychlení.
- Moment setrvačnosti soustavy n hmotných bodů vzhledem k ose otáčení je dán vztahem $J = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \cdots + m_nr_n^2$, kde $m_1, m_2, \ldots, m_n$ jsou hmotnosti jednotlivých bodů a $r_1, r_2, \ldots, r_n$ jsou vzdálenosti jednotlivých bodů od osy otáčení.

Výklad teorie reálných funkcí více reálných proměnných zaměříme zejména na reálné funkce dvou proměnných. Použitá terminologie a označení budou obdobná jako u funkce jedné proměnné.

Definice 2.1.1: *Řekneme, že funkčním předpisem $z = f(x, y)$ je určena reálná funkce f dvou reálných* ***proměnných****, jestliže:*

1. *Je dán obor $B \subset \mathbb{E}_2$, přípustných bodů z $\mathbb{E}_2$, nazývaných definičním oborem. Píšeme $D(f) = B$.*

2. *Každému bodu $X = [x, y] \in B$ je přiřazeno právě jedno reálné číslo $z \in E_1$ takové, že $z = f(x, y)$.*

$\triangle$

Říkáme také, že závisle proměnná z je *vyjádřena explicitně* jako funkce nezávisle proměnných x, y. Píšeme též

$$f : z = f(x, y), \quad [x, y] \in B.$$

Pokud není zadán definiční obor funkce f, pak za něj budeme považovat tzv. *přirozený definiční obor*, což je množina těch bodů v $\mathbb{E}_2$, pro které má funkční předpis $z = f(x, y)$ smysl.

Cvičení 2.1.1: Vytvořte definici reálné funkce $f : w = f(x, y, z)$ tří reálných proměnných s definičním oborem $D(f) \subset \mathbb{E}_3$.

Příklad 2.1.1: Určete definiční obor funkce $h(x, y) = \arcsin \frac{x-y}{2x+y}$.

Řešení: Víme, že arkussinus je definován v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Proto musí platit

$$-1 \leq \frac{x - y}{2x + y} \leq 1 \qquad 2x + y \neq 0.$$

To je splněno pokud

$$\left|\frac{x - y}{2x + y}\right| \leq 1 \quad \text{tj.} \quad |x - y| \leq |2x + y|,\ 2x + y \neq 0.$$

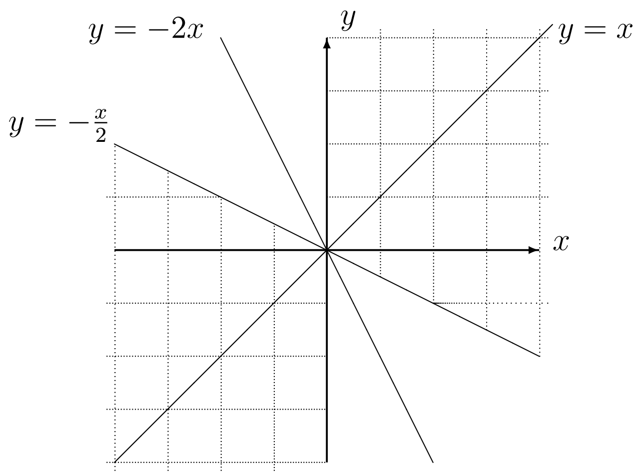
Odtud dostáváme:

1. Je-li $x - y \geq 0$, $2x + y > 0$, pak pro absolutní hodnoty platí $x - y \leq 2x + y$, tj. $y \geq -x/2$. Celkem tedy $y \leq x$, $y < -2x$, $y \geq -x/2$.

2. Pokud $x - y \geq 0$, $2x + y < 0$, pak $x - y \leq -2x - y$ a odtud $y \leq x$, $y < -2x$, $x \leq 0$.

3. Je-li $x - y \leq 0$, $2x + y > 0$, pak $-x + y \leq 2x + y$ a celkem dostáváme $y \geq x$, $y > -2x$, $x \geq 0$.

4. Pokud $x - y \leq 0$, $2x + y < 0$, pak $-x + y \leq -2x - y$ a tedy $y \geq x$, $y < -2x$, $y \leq -x/2$.



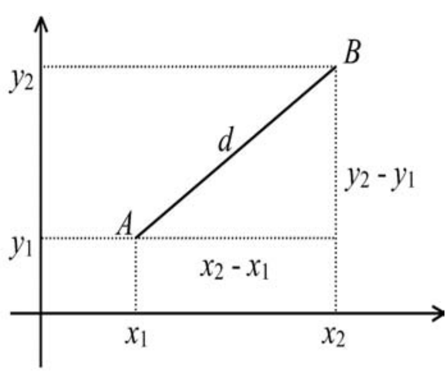
Cvičení 2.1.2: Určete definiční obory funkce

1) $f(x, y) = \ln \cos\left(\frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)\right)$,

2) $g(x, y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-6y}{4y-x^2-y^2}}$.

2.2 Limita a spojitost funkce

2.2.1 Euklidovské okolí bodu v $\mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3$



Obrázek 2.1: Vzdálenost bodů v $\mathbb{E}_2$.

V diferenciálním počtu funkce jedné proměnné jsme často pracovali s (otevřeným) okolím $O(x_0) = O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bodu x_0. Skutečnost, že $x \in O_\delta(x_0)$, je možné vyjádřit také zápisy $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $-\delta < x - x_0 < \delta$

nebo $|x - x_0| < \delta$. Vyjádření $d(x_0, x) = |x - x_0|$ přitom chápeme jako vzdálenost bodu x od bodu x_0 a okolí bodu x_0 je možné zapsat jako množinu $O(x_0) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < \delta\}$. Pojem (otevřeného) okolí bodu potřebujeme zavést také pro funkci více proměnných.

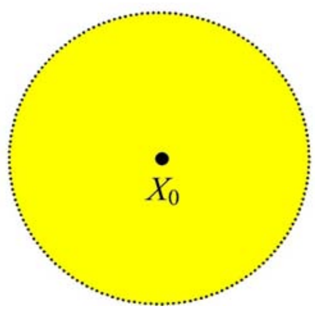
Jsou-li v prostoru $\mathbb{E}_2$ dány dva body $A = [x_1, y_1], B = [x_2, y_2]$, pak z pravoúhlého trojúhelníku uvedeného na obrázku 2.1 je patrné, že za (euklidovskou) vzdálenost bodů A, B můžeme vzít číslo

$$d = d_2(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

V případě $y_1 = 0, y_2 = 0$, pak vychází $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$, takže jde o přirozené zobecnění vzdálenosti z prostoru E_1. Okolím bodu $X_0 = [x_0, y_0] \in \mathbb{E}_2$ rozumíme množinu bodů $X = [x, y] \in \mathbb{E}_2$, pro které je vzdálenost $d_2(X_0, X) < r$. Můžeme pak psát

$$O(X_0) = O_r(X_0) = \{X \in \mathbb{E}_2; d_2(X_0, X) < r\} =$$
$$= \{X \in \mathbb{E}_2; \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}.$$

V prostoru $\mathbb{E}_2$ je tedy (otevřeným) okolím vnitřek kruhu o poloměru r se středem



Obrázek 2.2: Euklidovské okolí bodu v $\mathbb{E}_2$.

v bodě $X_0 = [x_0, y_0]$.

Euklidovskou vzdálenost bodů $X = [x_1, x_2, x_3], Y = [y_1, y_2, y_3]$ v prostoru $\mathbb{E}_3$ zavedeme vztahem

$$d_3(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (y_i - x_i)^2}.$$

Okolí $O_r(X_0)$ bodu X_0 si lze v $\mathbb{E}_3$ geometricky představit jako vnitřek koule o poloměru r se středem v bodě $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$.

Euklidovskou vzdálenost bodů $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n], Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ v prostoru $\mathbb{E}_n$ definujeme analogickým způsobem pomocí vztahu

$$d_n(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

Definice 2.2.1: *Okolím $O_r(X_0)$ bodu X_0 (poloměru $r > 0$)* v $\mathbb{E}_n$ pak nazveme množinu bodů $X \in \mathbb{E}_n$, jejichž vzdálenost od bodu X_0 je menší než r, tj. množinu

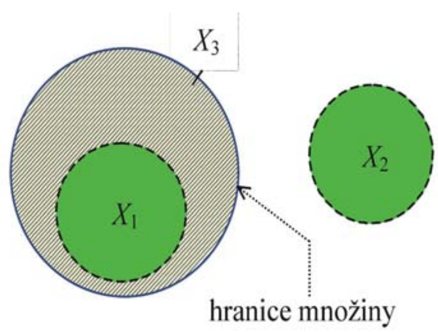
$$O_r(X_0) = \{X \in \mathbb{E}_n; d_n(X, X_0) < r\}.$$

Prstencovým $\mathcal{P}(X_0; r)$ okolím bodu X_0 o poloměru $r > 0$ nazveme množinu $\mathcal{P}(X_0; r) = O_r(X_0) - \{X_0\}$.

△

2.2.2 Některé množiny v $\mathbb{E}_2$

Zavedeme několik pojmů, které budeme v další části textu používat v podobných souvislostech, v jakých byly u funkce jedné proměnné používány pojmy otevřený či uzavřený interval, ohraničený interval, krajní body intervalu a podobně. Tyto pojmy mají velký význam například při formulování úloh pro lokální nebo absolutní extrémy funkce.



Obrázek 2.3: (Bod X_1 je vnitřním bodem množiny, X_2 je vnějším bodem množiny, X_3 je hraničním bodem množiny M.)

Definice 2.2.2: *Je-li $M \subset \mathbb{E}_2$, pak řekneme, že*

*a) bod $X \in M$ je **vnitřním bodem** množiny M, když existuje okolí $O(X)$ bodu X obsažené celé v množině M, tj. platí-li $O(X) \subset M$,*

*b) bod $X \in \mathbb{E}_2$ je **vnějším bodem** množiny M, když existuje okolí $O(X)$ takové, že neobsahuje žádný bod z množiny M, tj. je-li průnik množin $O(X) \cap M$ množinou prázdnou.*

*c) bod $X \in \mathbb{E}_2$ je **hraničním bodem** množiny M, jestliže každé okolí*

$O(X)$ obsahuje aspoň jeden bod množiny M a aspoň jeden bod, který do množiny M nepatří; množinu všech hraničních bodů budeme označovat ∂M a nazveme ji ***hranicí množiny*** *M.*

$\triangle$ (viz Obr. 2.3)

Na základě uvedené charakteristiky bodů množiny M zavádíme následující druhy množin v $\mathbb{E}_2$.

Definice 2.2.3: *Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{E}_2$ je*

a) ***otevřená****, jestli je každý bod $X \in M$ jejím vnitřním bodem,*

b) ***uzavřená****, když obsahuje všechny své hraniční body; množinu $\bar{M} = M \cup \partial M$ nazveme* ***uzávěrem množiny*** *M.*

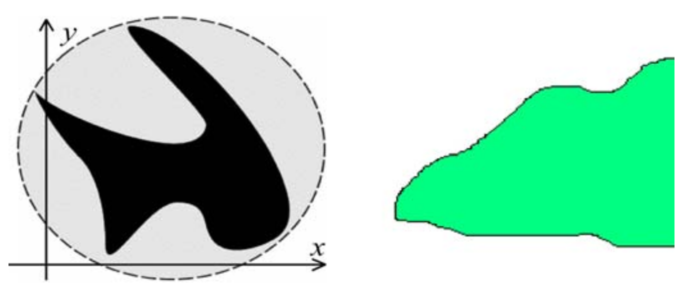
$\triangle$

Analogicky bychom definovali tyto pojmy v E_n.

Příklad 2.2.1: Kruh o rovnici $x^2 + y^2 < r^2$ poloměru r se středem v počátku je otevřená množina v prostoru $\mathbb{E}_2$. Každý bod $[x, y] \in \mathbb{E}_2$ splňující uvedenou nerovnost je vnitřním bodem kruhu. Hranici kruhu tvoří kružnice o rovnici $x^2 + y^2 = r^2$. Každý bod $[x, y] \in \mathbb{E}_2$ ležící vně kruhu a jeho hranice je vnějším bodem kruhu (viz Obr. 2.3).

Definice 2.2.4: *Množina M se nazývá* ***ohraničená*** *(omezená)* ***množina****, když existuje okolí $O_r(X)$ některého bodu $X \in \mathbb{E}_2$, které obsahuje množinu M.*

$\triangle$



Obrázek 2.4: Ohraničená množina.

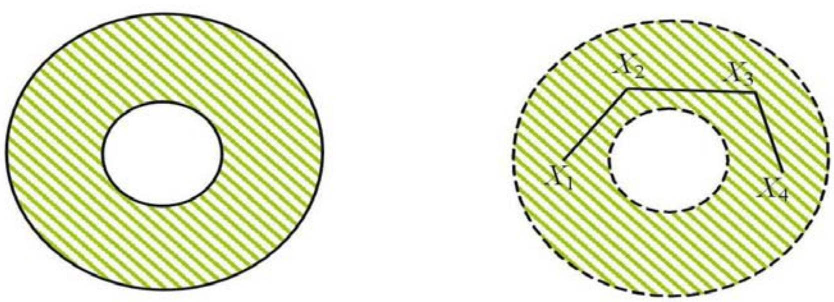
Ohraničenou množinu lze v prostoru $\mathbb{E}_2$ umístit do otevřeného kruhu $O_r(X)$ (lze ji ohraničit otevřeným kruhem konečného poloměru). Neohraničenou množinu v $\mathbb{E}_2$ nelze ohraničit žádným otevřeným kruhem konečného poloměru (viz Obr. 2.4).

Poznámka: Uzavřená a ohraničená množina v $\mathbb{E}_2$ se často nazývá kompaktní množina.

Definice 2.2.5: Množina M se nazývá *množina souvislá*, když lze její libovolné dva body spojit lomenou čarou vytvořenou z úseček $X_1X_2, X_2X_3, \ldots, X_{n-1}X_n$ ležících v množině M. *Otevřená a souvislá množina* $M \subset \mathbb{E}_n$ *se nazývá* ***oblast*** *v prostoru* $\mathbb{E}_n$. Sjednotíme-li oblast M s její hranicí ∂M, budeme hovořit o **uzávěru** $\bar{M} = M \cup \partial M$ **oblasti** M nebo také o **uzavřené oblasti**.

$\triangle$

Ohraničené uzávěry oblastí budou mít v $\mathbb{E}_n$ podobný význam, jaký mají na reálné ose v prostoru E_1 uzavřené intervaly.



Obrázek 2.5: Oblast.

Na pravém obrázku (Obr. 2.5) je příklad oblasti M, na levém je uzávěr $\bar{M} = M \cup \partial M$ oblasti M.

2.2.3 Limita posloupností

Posloupnost bodů v E_2

Definice 2.2.6: *Řekneme, že posloupnost bodů* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *v prostoru* $\mathbb{E}_2$ *konverguje k bodu* $A \in \mathbb{E}_2$, *jestliže ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro* ***všechna*** $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *platí* $d_2(X_n, A) < \varepsilon$. *Píšeme* $\lim_{n\to\infty} X_n = A$ *nebo pouze* $X_n \to A$.

$\triangle$

Ukážeme si, že platí toto tvrzení:

Tvrzení: Posloupnost bodů $X_n = [x_n, y_n] \in \mathbb{E}_2$ konverguje k bodu $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{E}_2$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} x_n = a_1$, $\lim_{n\to\infty} y_n = a_2$.

Pokud totiž $\lim_{n\to\infty} X_n = A$, pak z nerovnice $\sqrt{(x_n-a_1)^2+(y_n-a_2)^2} < \varepsilon$ vyplývá, že $|x_n - a_1| \leq \sqrt{(x_n-a_1)^2+(y_n-a_2)^2}$ a také $|y_n - a_2| \leq \sqrt{(x_n-a_1)^2+(y_n-a_2)^2}$ a tedy $\lim_{n\to\infty} x_n = a_1$ a $\lim_{n\to\infty} y_n = a_2$. Obráceně platí-li, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a_1$ a $\lim_{n\to\infty} y_n = a_2$, pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že $|x_n - a_1| < \varepsilon/\sqrt{2}$ pro všechna $n \geq n_1$ a $|y_n - a_2| < \varepsilon/\sqrt{2}$ pro všechna $n \geq n_2$. Položíme-li $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, pak pro $n \geq n_0$ platí $|x_n - a_1|^2 < \varepsilon^2/2$, $|y_n - a_2|^2 < \varepsilon^2/2$ a tedy $d_2(X_n, A) = \sqrt{(x_n-a_1)^2+(y_n-a_2)^2} < \sqrt{\varepsilon^2/2+\varepsilon^2/2} = \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$.

Poznámka: Pro posloupnosti bodů v $\mathbb{E}_2$ platí některé vlastnosti jako pro číselné posloupnosti. Například:

1. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
2. Když $X_n \to A$, $Y_n \to B$, pak $X_n + Y_n \to A + B$.
3. Když $X_n \to A$, $k_n \to k$ v $\mathbb{E}_1$, pak $k_n X_n \to kX$.

Příklad 2.2.2: Určete limitu posloupnosti $X_n = [\frac{2}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$.

Řešení: Jde vlastně o posloupnost bodů na přímce $y = 1 + \frac{x}{2}$, neboť $x_n = \frac{2}{n}$, $y_n = 1 + \frac{1}{n}$, t.j. $y_n = 1 + \frac{x_n}{2}$. Platí $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. Proto posloupnost bodů X_n konverguje k bodu $A = [0, 1]$.

2.2.4 Limita funkce

Limitu funkce dvou proměnných zavedeme obdobně jako u funkce jedné proměnné. Vyjdeme z Heineovy definice, která využívá posloupností.

Definice 2.2.7: *Řekneme, že funkce f má v bodě $A \in \mathbb{E}_2$ limitu rovnou číslu $b \in \mathbb{R}^*$ a píšeme*

$$\lim_{X\to A} f(X) = b,$$

jestliže

a) funkce f je definovaná v nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}(A;\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$,

b) pro každou posloupnost bodů $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z okolí $\mathcal{P}(A;\varepsilon)$, která konverguje k bodu A, platí $\lim_{n\to\infty} f(X_n) = b$.

△

Příklad 2.2.3: Určete limity (existují-li)

$$\text{a)}\ \lim_{[x,y]\to[2,-1]}(x^2+y^3), \qquad \text{b)}\ \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

$$\text{c)}\ \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+9}-3}, \quad \text{d)}\ \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Řešení:

a) Jak víme, posloupnost $[x_n, y_n]$ konverguje k bodu $[2,-1]$ jestliže $x_n \to 2$, $y_n \to -1$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} f(X_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 + \lim_{n\to\infty} y_n^3 = 4 - 1 = 3.$$

b) Dosazením bodu $A = [0,0]$ do funkčního předpisu dostáváme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Zvolme si nejprve posloupnost $X_n = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, která konverguje k bodu A. Pro tuto posloupnost dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Bylo by však chybou se domnívat, že funkce f má v bodě A limitu rovnou jedné. Zvolíme-li si totiž například posloupnost $X_n = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}]$, pak

$$\lim_{n\to\infty} f(X_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^4}{n^3\cdot(n^2+1)} = 0.$$

Limita funkce f v bodě A tedy neexistuje, protože pro různé posloupnosti dostáváme různé výsledky.

c) $\lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+9}-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{(x^2+y^2)\cdot(\sqrt{x^2+y^2+9}+3)}{x^2+y^2} =$

$$= \lim_{[x,y]\to[0,0]}(\sqrt{x^2+y^2+9}+3) = 6.$$

d) $\lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{1}{x^2+y^2} = \left[\frac{1}{0_+}\right] = \infty.$

Cvičení 2.2.1: Vyšetřete následující limity

1. $\lim_{[x,y]\to[1,2]}\frac{2x+y^3}{y+\sqrt{2x-1}}$,
2. $\lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{x^2+y^2}{3x^2+4y^2}$,
3. $\lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{8x^2+6y^2}{\sqrt{4x^2+3y^2+4}-2}$,
4. $\lim_{[x,y]\to[0,0]}\frac{3x^2+3y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2+1}-1}$.

2.2.5 Spojitost funkce

Vlastnosti spojitých funkcí lze využít například při hledání absolutních extrémů funkcí, integrování funkcí více proměnných, řešení diferenciálních rovnic.

Spojitost funkce dvou proměnných definujeme analogicky jako u funkce jedné proměnné.

Definice 2.2.8: Řekneme, že funkce f je spojitá

a) *v bodě* $A = [a_1, a_2]$, *je-li definována v nějakém okolí* $O(A)$ *a platí-li*

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A),$$

b) *na množině* $M \subset \mathbb{E}_2$, *jestliže pro každý bod* $A \in M$ *platí*

$$\lim_{X \in M,\, X \to A} f(X) = f(A).$$

△

Poznámky:

1. Zápisu $\lim_{X \in M, X \to A} f(X) = f(A)$ je třeba rozumět tak, že pro každou posloupnost bodů $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ z množiny M, která konverguje k bodu A, konverguje posloupnost funkčních hodnot $(f(X_n))_{n=1}^{\infty}$ k funkční hodnotě $f(A)$.

2. Pokud je funkce f spojitá v každém bodě svého definičního oboru, pak stručně říkáme, že je *spojitá*.

3. Ze spojitosti funkcí f, g na množině M vyplývá na množině M také spojitost funkcí:

$|f|$,

$kf + lg$, kde $k, l \in \mathbb{R}$,

$f \cdot g$,

f/g, pokud $g(X) \neq 0$ na M.

Příklad 2.2.4: Ověřte spojitost funkce $f : z = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$ na množině $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;\ x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

Řešení: Uvažujme libovolný bod $A = [a_1, a_2] \in D(f)$ a zvolme si libovolnou posloupnost bodů $X_n = [x_n, y_n] \in D(f)$ konvergující k bodu A, t.j., $(x_n) \to a_1$, $(y_n) \to a_2$. Dle pravidel pro počítání s limitami posloupností dostaneme

$$\lim_{n \to \infty} f(X_n) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{1 - x_n^2 - 4y_n^2} = \sqrt{1 - \lim_{n \to \infty} x_n^2 - 4 \lim_{n \to \infty} y_n^2} =$$

$$= \sqrt{1 - a_1^2 - 4a_2^2} = f(A).$$

Příklad 2.2.5: Zjistěte, zda je funkce f spojitá v bodě $A=[0,0]$, jestliže

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y]\in\mathbb{E}_2-\{[0,0]\},\\ 0 & \text{pro } [x,y]=[0,0].\end{cases}$$

Řešení: Zvolme si například posloupnost bodů $X_n=[1/n,k/n]$, $k\in\mathbb{R}$, která pro $n\to\infty$ konverguje k bodu $[0,0]$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} f(X_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{k^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

Vidíme tedy, že limita funkce f v bodě $[0,0]$ neexistuje a funkce f proto nemůže být v bodě $[0,0]$ spojitá, i když je v něm definovaná.

Pro spojité funkce platí tyto důležité věty:

Weierstrassova věta: *Je-li funkce f spojitá na ohraničené a uzavřené množině $M\subset\mathbb{E}_2$, pak funkce f je na M ohraničená a nabývá na M své nejmenší a největší hodnoty.*

Bolzanova věta: *Je-li funkce f spojitá na otevřené a souvislé množině $M\subset\mathbb{E}_2$ a platí-li pro body $A,B\in M$, že $f(A)\neq f(B)$, pak ke každému c ležícímu mezi hodnotami $f(A)$ a $f(B)$ existuje bod $C\in M$ takový, že $f(C)=c$.*

Poznámka: Doporučujeme čtenáři promyslet si jako důsledek těchto vět následující skutečnost. Je-li f funkce spojitá v bodě $A\in M$, která je v bodě A otevřené a souvislé množiny M kladná, pak existuje celé okolí $O(A)$ takové, že $f(x,y)>0$ pro každý bod $[x,y]\in O(A)$.

Cvičení 2.2.2: Řešte příklady

1. Ukažte, že funkce

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3-x+y}{x+2y} & \text{pro } [x,y]\in\mathbb{E}_2-\{[1,2]\}\\ 1 & \text{pro } [x,y]=[1,2]\end{cases}$$

není v bodě $A=[1,2]$ spojitá. Změňte hodnotu funkce f v bodě A tak, aby f byla spojitá v bodě A.

2. Doplňte hodnotu funkce $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě $A=[0,0]$ tak, aby funkce f byla v tomto bodě spojitá.

3. Zjistěte, zda funkce

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{2x^2+y^2} & \text{pro } [x,y]\in\mathbb{E}_2-\{[0,0]\}\\ 0 & \text{pro } [x,y]=[0,0]\end{cases}$$

je v bodě $A=[0,0]$ spojitá.

2.3 Parciální derivace

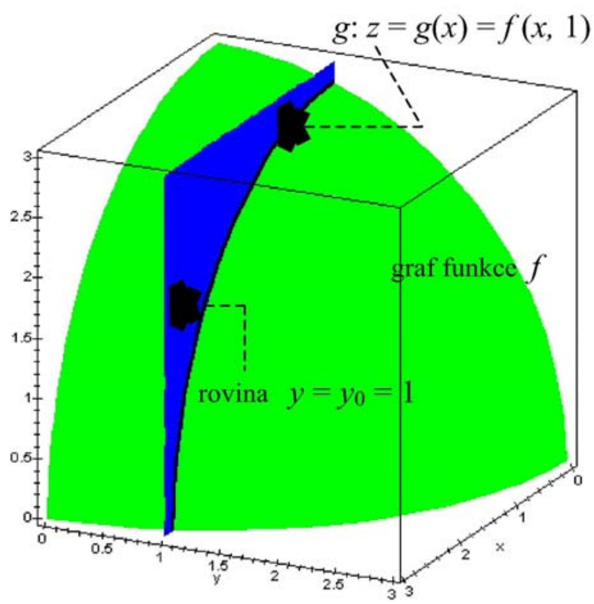
2.3.1 Parciální derivace funkce dvou proměnných

Z teorie funkce jedné proměnné víme, že existuje-li limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

pak ji nazýváme derivací funkce f v bodě $x_0 \in D(f)$. Známe fyzikální a geometrický význam derivace funkce v bodě. Tyto poznatky můžeme využít pro zavedení pojmu parciální (dílčí, částečné) derivace funkce dvou proměnných x, y podle proměnné x (resp. y).

Je-li funkce $f : z = f(x, y)$ definována v nějakém okolí $O(A)$ bodu $A = [x_0, y_0]$, pak funkce $f(x, y_0)$ je v nějakém okolí bodu x_0 funkcí jedné proměnné x a můžeme psát $g(x) = f(x, y_0)$. Grafem funkce g je průnik grafu funkce $z = f(x, y)$ s rovinou o rovnici $y = y_0$, která je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou (xz) (viz Obr. 2.6).



Obrázek 2.6:

Existuje-li derivace

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h} = f'_x(x_0, y_0),$$

pak ji můžeme nazvat parciální derivací funkce f podle proměnné x v bodě A a pro zjednodušení můžeme psát $f'_x(A)$.

Podobnou úvahu můžeme provést pro funkci $h(y) = f(x_0, y)$ jedné proměnné y a můžeme definovat parciální derivaci $f'_y(x_0, y_0) = h'(y_0)$ funkce f podle proměnné y v bodě A.

Definice 2.3.1: *Je-li funkce $z = f(x, y)$ definovaná v nějakém okolí $O(A)$ bodu $A = [x_0, y_0]$ a existuje-li konečná limita*

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

pak ji nazýváme parciální derivací funkce f podle proměnné x v bodě A. Existuje-li konečná limita

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k},$$

pak ji nazýváme parciální derivací funkce f podle proměnné y v bodě A.

$\triangle$

Z vlastností limit víme, že limita existuje nejvýše jedna. Je-li definována parciální derivace $f'_x(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ v každém bodě $[x, y]$ množiny $M \subset D(f)$, pak je každému bodu $[x, y]$ množiny M přiřazena právě jedna hodnota $f'_x(x, y)$. Proto je $f'_x(x, y)$ v množině M funkčním předpisem funkce dvou proměnných a f'_x je na M funkcí. Stejně tak, je-li definována v každém bodě množiny M parciální derivace $f'_y(x, y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$, je v množině M funkcí dvou proměnných i parciální derivace f'_y. Formálně můžeme uvažovat v otevřené množině M funkci $z = f(x, y)$ dvou proměnných a volit libovolně, ale pevně, proměnnou y pro výpočet parciální derivace f'_x, případně volit libovolně, ale pevně, proměnnou x pro výpočet parciální derivace f'_y.

Vždy je splněno, že definiční obory parciálních derivací jsou podmnožinami definičního oboru funkce f. Tam, kde není definována funkce, nemůže existovat ani parciální derivace (rozmyslete si proč).

2.3.2 Parciální derivace funkce více proměnných

Definice 2.3.2: *Je-li funkce $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definovaná v nějakém okolí $O(A)$ bodu $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ a existuje-li konečná limita*

$$f'_{x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lim_{h_i\to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i - 1, a_i + h_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h_i},$$

pak ji nazýváme parciální derivací funkce f podle i-té proměnné x_i v bodě A, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$\triangle$

Příklad 2.3.1: Je dána funkce

$$f : u = \sin(xyz) + ze^{\frac{xz}{y}} + 2y.$$

Najděte parciální derivace f'_x, f'_y, f'_z v bodech $M_1 = [1, 0, 1]$ a $M_2 = [\pi/2, 1, 1]$.

Řešení: Postupně počítáme

$$f'_x(x, y, z) = \left(\sin(xyz) + ze^{\frac{xz}{y}} + 2y\right)'_x = \cos(xyz) \cdot (xyz)'_x + ze^{\frac{xz}{y}} \cdot \left(\frac{xz}{y}\right)'_x + 0 =$$

$$= yz \cdot \cos(xyz) + \frac{z^2}{y}e^{\frac{xz}{y}},$$

kde jsme při parciálním derivování považovali proměnné y, z za konstanty. Analogicky

$$f'_y(x, y, z) = \left(\sin(xyz) + ze^{\frac{xz}{y}} + 2y\right)'_y = \cos(xyz) \cdot (xyz)'_y + ze^{\frac{xz}{y}} \cdot \left(\frac{xz}{y}\right)'_y + 2 =$$

$$= xz \cdot \cos(xyz) - \frac{xz^2}{y^2}e^{\frac{xz}{y}} + 2,$$

přičemž za konstantní považujeme proměnné x, z. Podobně

$$f'_z(x, y, z) = \left(\sin(xyz) + ze^{\frac{xz}{y}} + 2y\right)'_z = \cos(xyz)\cdot(xyz)'_z + 1\cdot e^{\frac{xz}{y}} + z\cdot e^{\frac{xz}{y}} \cdot \left(\frac{xz}{y}\right)'_z + 0 =$$

$$= xy \cdot \cos(xyz) + e^{\frac{xz}{y}} + \frac{xz}{y}e^{\frac{xz}{y}},$$

kde jsme při parciálním derivování považovali za konstanty proměnné x, y. Pro všechny funkce musí být splněno $y \neq 0$, aby byly definovány. V bodě $M_1 = [1, 0, 1]$ tato podmínka splněna není, proto funkce ani její parciální derivace neexistují. V bodě $M_2 = [\pi/2, 1, 1]$ platí

$$f'_x(M_2) = f'_x(\pi/2, 1, 1) = 1 \cdot \cos\pi/2 + 1 \cdot e^{\pi/2} = e^{\pi/2},$$

$$f'_y(M_2) = f'_y(\pi/2, 1, 1) = (\pi/2) \cdot \cos\pi/2 - (\pi/2) \cdot e^{\pi/2} + 2 = 2 - (\pi/2) \cdot e^{\pi/2},$$

$$f'_z(M_2) = f'_z(\pi/2, 1, 1) = (\pi/2) \cdot \cos\pi/2 + e^{\pi/2} + (\pi/2) \cdot e^{\pi/2} = (1 + \pi/2) \cdot e^{\pi/2}.$$

Příklad 2.3.2: Je dána funkce $f : z = \ln(x^2y) - 3x^2 + 2y$. Najděte parciální derivace f'_x, f'_y a zjistěte, kde existují. Určete hodnoty obou parciálních derivací v bodech $M_1 = [-1, -1]$ a $M_2 = [1, 1]$.

Řešení: Nejprve najdeme definiční obor $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x \neq 0, y > 0\}$ funkce f. Pro parciální derivaci f'_x dostáváme

$$f'_x(x, y) = \left(\ln(x^2y) - 3x^2 + 2y\right)'_x = \frac{1}{x^2y} \cdot (x^2y)'_x - 6x = \frac{1}{x^2y} \cdot 2xy - 6x.$$

Podobně

$$f'_y(x, y) = \left(\ln(x^2y) - 3x^2 + 2y\right)'_y = \frac{1}{x^2y} \cdot (x^2y)'_y + 2 = \frac{1}{x^2y} \cdot x^2 + 2 =$$

$$= \frac{1}{y} + 2 = \frac{1 + 2y}{y}.$$

Definiční obory $D(f'_x) = D(f'_y) = D(f)$, a to i přes skutečnost, že funkční předpisy pro parciální derivace existují obecně i pro $y < 0$. Proto nejsou v bodě M_1 parciální derivace definovány. V bodě M_2 existují obě parciální derivace a dosazením do funkčních předpisů získáme

$$f'_x(1, 1) = -4, \quad f'_y(1, 1) = 3.$$

Cvičení 2.3.1: Vypočtěte hodnoty $f'_x(A), f'_y(A)$ parciálních derivací funkce $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y} - 3 \cdot \sqrt{x}}$ v bodě $A = [1, 1]$.

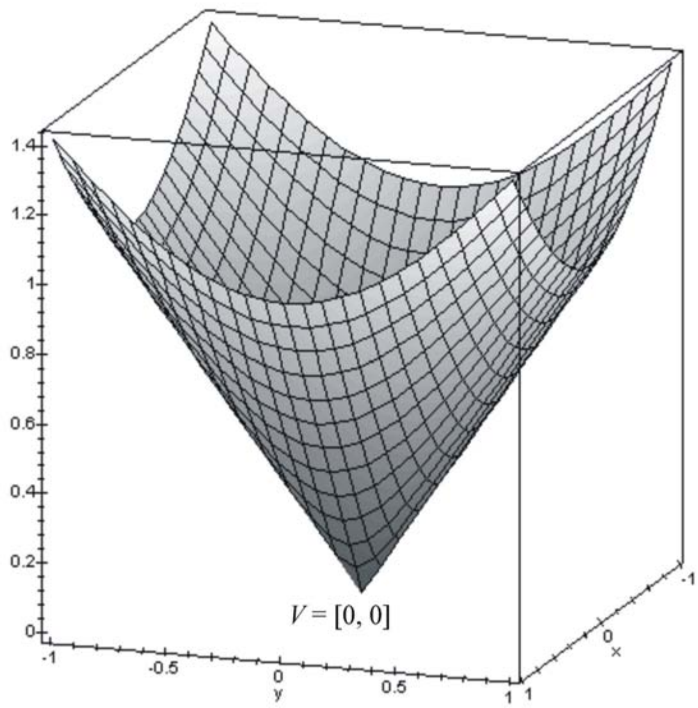
Cvičení 2.3.2: Určete parciální derivace prvního řádu a jejich definiční obory:

1. $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x^3}$,
2. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$,
3. $f(x, y) = e^{x/y} \cos y$.

2.3.3 Vztah mezi existencí parciálních derivací a spojitostí funkce

Stejně jako u funkce jedné proměnné může být funkce $z = f(x, y)$ spojitá v bodě $A = [x_0, y_0]$ a přitom nemusí mít některou z parciálních derivací $f'_x(A)$, $f'_y(A)$. Příkladem může být funkce $f : z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Jejím grafem je kuželová plocha s vrcholem $V = [0, 0]$ a není obtížné se výpočtem přesvědčit, že ani jedna z parciálních derivací v bodě V neexistuje. Přitom je funkce f v bodě V spojitá, jak vidíme na grafu funkce f.

V teorii funkce jedné proměnné platilo tvrzení: Má-li funkce f v bodě x_0 konečnou derivaci, pak je f v bodě x_0 spojitá, tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. U funkce dvou a více proměnných je situace složitější a nestačí předpokládat existenci parciálních derivací prvního řádu, abychom měli zajištěnou spojitost funkce.



Obrázek 2.7: Graf funkce $f: z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Příklad 2.3.3: Ukážeme si situaci na grafu funkce dvou proměnných

$$f: z = \begin{cases} 0 & \text{pro } xy \neq 0 \\ 1 & \text{pro } xy = 0 \end{cases}$$

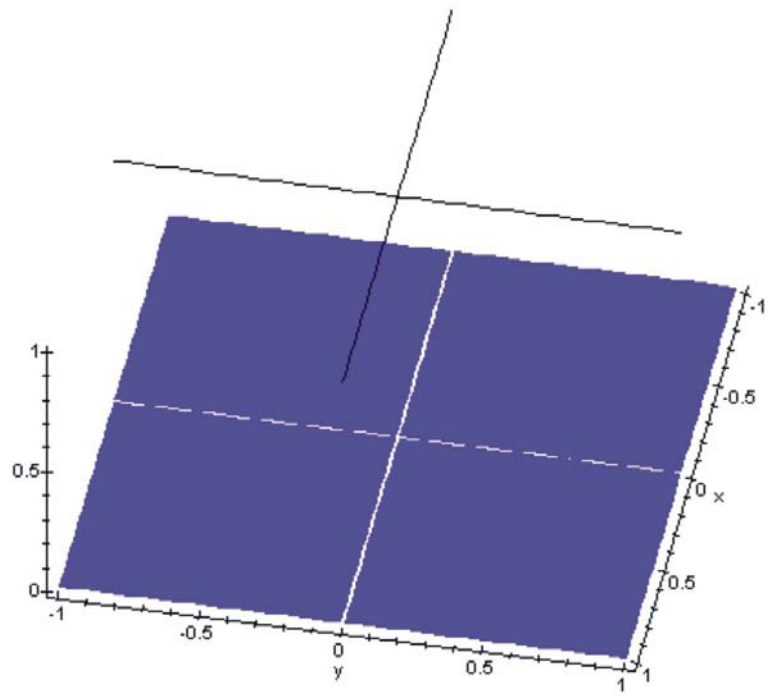
definovanou v každém bodě prostoru $\mathbb{E}_2$.

Grafem této funkce je rovina (xy) s výjimkou souřadnicových os x, y, na kterých jsou funkční hodnoty rovny 1. Všimněte si, že například v bodě $O = [0, 0]$ existují parciální derivace f'_x, f'_y a jsou rovny nule. Platí totiž

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{1-1}{k} = 0.$$

Současně je však vidět, že funkce f není v bodě O spojitá. Stačí například zvolit posloupnosti bodů $X_n = [\frac{1}{n}, 0]$, $\tilde{X}_n = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, které konvergují k bodu $O = [0, 0]$ a přitom platí $\lim_{n \to \infty} f(X_n) = 1$, $\lim_{n \to \infty} f(\tilde{X}_n) = 0$. Proto neexistuje $\lim_{X \to [0,0]} f(X)$ a funkce f není tedy v bodě $[0, 0]$ spojitá.



Obrázek 2.8: Graf funkce příkladu 2.3.3

Je třeba si uvědomit, že parciální derivace poskytují informace o chování funkce f pouze ve směrech rovnoběžných se souřadnicovými osami x, y a proto z jejich existence nevyplývá spojitost.

Tvrzení: *Má-li funkce f v okolí $O(A)$ bodu $A \in D(f)$ parciální derivace f'_x, f'_y, které jsou v $O(A)$ ohraničené, pak je funkce f v bodě A spojitá.*

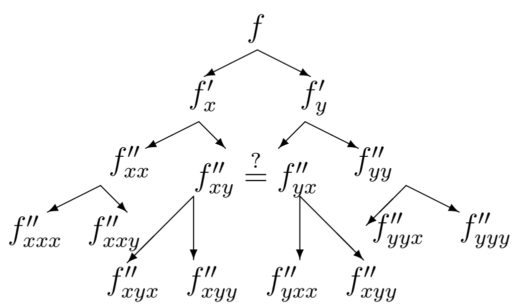
Tvrzení nebudeme dokazovat. Je však nutné si uvědomovat důležitost splnění předpokladů pro řešení konkrétních matematických úloh a další hlubší souvislosti mezi matematickými výsledky. Jsou-li pro parciální derivace splněny silnější požadavky, než je jejich ohraničenost, pak se uvádějí zpravidla jen ony. Například mohou být všechny parciální derivace f'_{x_i} v okolí $O(A)$ bodu $A \in D(f)$ spojité. Pak je potřebné si uvědomit, že jsou spojité také na uzávěru $\bar{O}_1(A) \subset O(A)$ nějakého okolí bodu A a že okolí $\bar{O}_1(A)$ je ohraničenou množinou. Ze základních vět o spojitých funkcích pak získáme informaci, že funkce spojitá na uzavřené a ohraničené množině je ohraničená funkce. Tím zdůvodníme ohraničenost každé parciální derivace f'_{x_i} v okolí $O_1(A)$ a následně spojitost funkce f v samotném bodě A.

2.3.4 Parciální derivace vyšších řádů

Předpokládejme například, že má funkce f parciální derivace f'_x v každém bodě $[x, y] \in U \subset D(f)$.

Parciální derivace f'_x je limita, která má v každém bodě $[x, y] \in U$ právě jednu hodnotu $f'_x(x, y)$ a je proto na U opět funkcí dvou proměnných.

Označme $g(x, y) = f'_x(x, y)$. Pak se můžeme ptát, zda existují parciální derivace funkce g podle jednotlivých proměnných x nebo y. Existuje-li $g'_x(x, y) = \left(f'_x(x, y)\right)'_x$, pak použijeme stručnější označení $f''_{xx}(x, y)$ a název *parciální derivace druhého řádu* funkce f podle proměnné x. Podobně $g'_y(x, y) = \left(f'_x(x, y)\right)'_y = f''_{xy}(x, y)$ nazveme *smíšenou parciální derivací druhého řádu* funkce f stejně tak, jako parciální derivaci $(f'_y)'_x = f''_{yx}$. Funkci f''_{yy} nazveme *parciální derivací druhého řádu* funkce f podle proměnné y. Budou-li existovat všechny dále uvažované parciální derivace, můžeme v tomto postupu pokračovat k parciálním derivacím třetího řádu f'''_{xxx}, f'''_{xxy}, f'''_{xyx}, f'''_{yxx}, f'''_{xyy}, f'''_{yxy}, f'''_{yyx}, f'''_{yyy} a dalším vyšším řádům parciálních derivací. Schematicky lze situaci znázornit níže uvedeným diagramem. Diagram pokračuje dalšími kroky, pokud odpovídající parciální derivace existují. Pro funkci $f(x, y, z)$ tří proměnných by se u každé funkce šipky dělily do tří směrů a celá struktura by proto byla ještě složitější. V diagramu je naznačena otázka, zda není možné si výpočet zjednodušit a zda může nastat situace, kdy jsou si smíšené parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} navzájem rovny.



Odpověď dává tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

> **Tvrzení**: Jsou-li parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} funkce $z = f(x, y)$ spojité v bodě $A = [x_0, y_0]$, pak platí rovnost $f''_{xy}(A) = f''_{yx}(A)$.

Důsledek: Jsou-li spojité parciální derivace f'''_{xxy}, f'''_{xyx} v bodě A, pak platí rovnost $f'''_{xxy}(A) = ((f'_x)''_{xy})(A) = ((f'_x)''_{yx})(A) = f'''_{xyx}(A)$, protože se jedná o spojité smíšené parciální derivace druhého řádu funkce f'_x v bodě A.

Pro funkci f, která má v bodě $A = [x_0, y_0]$ spojité parciální derivace n–tého řádu lze dokázat, že při výpočtu parciálních derivací n–tého řádu

a) nezáleží na pořadí derivování,

b) hodnota parciální derivace n–tého řádu funkce f v bodě A závisí pouze na tom, kolikrát se derivovalo podle proměnné x a kolikrát podle proměnné y.

Příklad 2.3.4: Vypočtěte parciální derivace čtvrtého řádu funkce $f(x,y) = xe^{x+y}$.

Řešení: Funkce $f(x,y) = xe^{x+y} = xe^x e^y$ je spojitá v $\mathbb{E}_2$ a má zde spojité parciální derivace libovolného řádu, protože parciálním derivováním se zachovává spojitost exponenciální funkce a spojitost polynomu, který exponenciální funkci násobí. Proto jsou si smíšené parciální derivace odpovídajícího typu navzájem rovny a výpočet lze značně zjednodušit. Vypočteme nejprve

$$f'_x(x,y) = (xe^x)'_x\, e^y = (x+1)e^{x+y}, \qquad f'_y(x,y) = xe^x\,(e^y)'_y = xe^{x+y}.$$

Pak

$$f''_{xx}(x,y) = (f'_x(x,y))'_x = ((x+1)e^x)'_x\, e^y = (x+2)e^{x+y}$$

a podobným způsobem

$$f''_{xy}(x,y) = (x+1)e^{x+y}, \quad f''_{yy}(x,y) = xe^{x+y}.$$

Parciální derivace třetího řádu pak jsou

$$\begin{aligned} f'''_{xxx}(x,y) &= (x+3)e^{x+y}, \quad f'''_{xxy}(x,y) = (x+2)e^{x+y},\\ f'''_{xyy}(x,y) &= (x+1)e^{x+y}, \quad f'''_{yyy}(x,y) = xe^{x+y}, \end{aligned}$$

a konečně

$$\begin{aligned} f^{(4)}_{xxxx}(x,y) &= (x+4)e^{x+y}, \quad f^{(4)}_{xxxy}(x,y) = (x+3)e^{x+y},\\ f^{(4)}_{xxyy}(x,y) &= (x+2)e^{x+y}, \quad f^{(4)}_{xyyy}(x,y) = (x+1)e^{x+y},\\ f^{(4)}_{yyyy}(x,y) &= xe^{x+y}. \end{aligned}$$

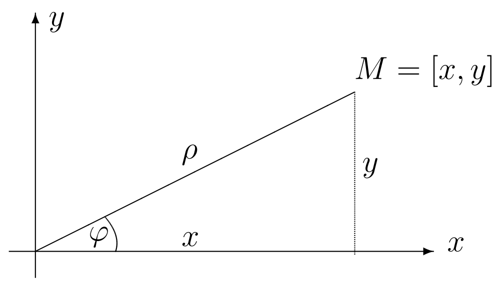
Cvičení 2.3.3: Určete parciální derivace:

1. $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$, jestliže $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$,
2. f'''_{xxy}, jestliže $f(x,y) = \sin 2x \cdot \cos y$,
3. f''_{xyy}, jestliže $f(x,y) = xy + \cos xy$.

2.4 Složená funkce

Z teorie funkce jedné proměnné známe pojem složené funkce $f(g(x))$ a podmínky její existence. V prostoru $\mathbb{E}_2$ je situace analogická, i když poněkud složitější.

Ukažme si, jak může složená funkce dvou proměnných přirozeným způsobem vzniknout. Vedle kartézských souřadnic $[x, y]$ bodu prostoru $\mathbb{E}_2$ můžeme použít jeho polární souřadnice $[\rho, \varphi]$. Vzájemný vztah mezi souřadnicemi $[x, y]$, $[\rho, \varphi]$ a geometrický význam souřadnic $[\rho, \varphi]$ je patrný z následujícího obrázku.



Parametr ρ má význam průvodiče bodu $[x, y]$, φ je úhel průvodiče s kladným směrem souřadnicové osy x. Z pravoúhlého trojúhelníku o stranách x, y, ρ, umíme vyjádřit souřadnice

$$x = g_1(\rho, \varphi) = \rho \cdot \cos\varphi,\ \ y = g_2(\rho, \varphi) = \rho \cdot \sin\varphi,$$

pomocí dvou funkcí proměnných ρ, φ.

Je-li nyní dána funkce dvou proměnných, například $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, pak převodem této funkce do polárních souřadnic pomocí funkcí

$$x = g_1(\rho, \varphi) = \rho\cos\varphi, \quad y = g_2(\rho, \varphi) = \rho\sin\varphi$$

získáme novou funkci $F(\rho, \varphi)$ definovanou funkčním předpisem

$$F(\rho, \varphi) = f(g_1(\rho, \varphi), g_2(\rho, \varphi)) = g_1(\rho, \varphi)^2 + g_2(\rho, \varphi)^2 =$$

$$= \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2.$$

V tomto konkrétním příkladě je funkce F funkcí obou nových proměnných ρ, φ, i když funkční předpis proměnnou φ neobsahuje.

V mnoha úlohách máme snahu vyjádřit výslednou funkci jako funkci proměnných x, y. Toho lze snadno dosáhnout formálním přeznačením proměnných dané funkce f a proměnných u transformačních funkcí.

2.4.1 Složená funkce dvou a více proměnných

Definice 2.4.1: *Mějme funkci $f : z = f(u, v)$ definovanou na množině $N \subset \mathbb{E}_2$ a funkce $u = g_1(x, y)$, $v = g_2(x, y)$ definované na množině $M \subset \mathbb{E}_2$. Jestliže pro každý bod $A \in M$ patří bod $B = [g_1(A), g_2(A)]$ do množiny N, pak řekneme, že předpisem $F(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y))$ je na množině M definovaná* ***složená***

funkce *$F = f(g_1, g_2)$. Přitom platí $F(A) = f(g_1(A), g_2(A)) = f(B)$. Funkci f nazýváme* ***vnější složkou*** *funkce F a funkce g_1, g_2 jejími* ***vnitřními složkami****.*

$\triangle$

Často používáme pro vnější a vnitřní složky složené funkce označení $z = z(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$.

Podobně jako u funkce dvou proměnných můžeme definovat předpisem

$$F(x, y, z) = f(g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), g_3(x, y, z))$$

složenou funkci tří proměnných a obecněji předpisem

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

složenou funkci n proměnných v prostoru $\mathbb{E}_n$.

2.4.2 Parciální derivace složené funkce

$\surd\surd$ **Komentář 2.4.1:** Při řešení praktických úloh se setkáváme se složenou funkcí dvou proměnných $F(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y))$, kde druhá vnitřní složka $g_2(x, y) = 1$, je konstantní funkcí. Pak chápeme při označení $F(x, y) = h(g_1(x, y)) = f(g_1(x, y), 1)$ složenou funkci F jako složení funkce jedné proměnné $h(u)$ s jednou funkcí dvou proměnných $g(x, y) = g_1(x, y)$. Složená funkce $F(x, y) = h(g(x, y))$ má z pohledu praktického počítání parciálních derivací mnoho společného se složenou funkcí $F(x) = h(g(x))$ jedné proměnné. Při derivování funkcí jedné proměnné jsme používali větu o derivaci složené funkce $h : y = f(g(x))$, kterou můžeme zapsat například ve tvaru $h'(x) = (f(g(x)))' = f'_u(u) \cdot g'(x)$, kde $u = g(x)$ a označení $f'_u(u)$ znamená derivaci funkce f podle celého argumentu $u = g(x)$. Připomeňme, že pro použití vzorce je nutné, aby existovaly všechny derivace, které se ve vzorci vyskytují.

Cvičení 2.4.1:

1. Funkce $\varphi(u)$ má v každém bodě u derivaci. Ukažte, že funkce $z = \varphi(x^2 + y^2)$ splňuje rovnici
$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

   Řešení: Zavedeme-li označení $u = g(x, y) = x^2 + y^2$, pak
$$z'_x = \varphi'_u(u) \cdot g'_x = \varphi'_u(u) \cdot 2x,$$
$$z'_y = \varphi'_u(u) \cdot g'_y = \varphi'_u(u) \cdot 2y.$$

   Dosazením do levé strany rovnice příkladu skutečně obdržíme
$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (2xy - 2xy)\varphi'_u(u) = 0.$$

2. Ukažte, že funkce $z = f(x+ay)$ ($f(u)$ má derivaci, a je nenulová konstanta) splňuje rovnici $z'_y = az'_x$.

3. Ukažte, že je-li $w = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$, kde $x = r\cos u \cos v$, $y = r\cos u \sin v$, $z = r\sin u$ ($r > 0$ je konstanta), pak platí rovnice $\partial w/\partial u = 0$, $\partial w/\partial v = 0$.

4. Dvěma postupy najděte $\partial z/\partial x$ a $\partial z/\partial y$ funkce $z = \operatorname{arctg}(x/y)$, kde $x = u\sin v$, $y = u\cos v$.

Parciální derivace složené funkce obsahující obě vnitřní složky je složitější, jak si ukážeme v následujícím odstavci.

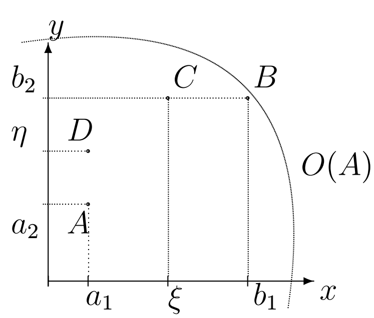
Lagrangeova věta

Z Lagrangeovy věty o přírůstku pro funkci jedné proměnné můžeme odvodit podobnou větu pro funkci dvou proměnných.

Věta: Je-li funkce f definovaná v nějakém okolí $O_\varepsilon(A)$ bodu $A = [a_1, a_2]$ a má-li v tomto okolí obě parciální derivace prvního řádu f'_x a f'_y, pak pro bod $B = [b_1, b_2] \in O_\varepsilon(A)$ je splněno

$$f(B) - f(A) = f'_x(C) \cdot (b_1 - a_1) + f'_y(D) \cdot (b_2 - a_2),$$

kde $C = [\xi, b_2]$, $D = [a_1, \eta]$, přičemž ξ leží mezi a_1 a b_1 a η leží mezi a_2 a b_2.



Zdůvodnění: Vyjádříme-li rozdíl funkčních hodnot $f(B) - f(A)$ ve tvaru

$$f(b_1, b_2) - f(a_1, a_2) = (f(b_1, b_2) - f(a_1, b_2)) + (f(a_1, b_2) - f(a_1, a_2)),$$

pak si stačí uvědomit, že rozdíly v závorkách jsou funkce, v nichž se mění pouze jedna proměnná. Označíme-li si proto například $g(x) = f(x, b_2)$, pak $g'(x) = f'_x(x, b_2)$ a proto $g(b_1) - g(a_1) = g'(\xi) \cdot (b_1 - a_1)$. Stejné úvahy lze provést také pro funkci $h(y) = f(a_1, y)$. Obdržíme tak vztah uvedený ve větě.

Tvrzení: Mají-li funkce $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ spojité parciální derivace prvního řádu na otevřené množině $O(A)$, $A = [x_0, y_0]$, a funkce $z = f(u, v)$ má spojité parciální derivace prvního řádu na otevřené množině $O(B)$, $B = [u(A), v(A)]$, přičemž pro každý bod $C \in O(A)$ platí $[u(C), v(C)] \in O(B)$, pak složená funkce

$$z = F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$$

má v okolí $O(A)$ spojité parciální derivace prvního řádu a platí

$$\frac{\partial F(A)}{\partial x} = \frac{\partial f(B)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(A)}{\partial x} + \frac{\partial f(B)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(A)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial F(A)}{\partial y} = \frac{\partial f(B)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(A)}{\partial y} + \frac{\partial f(B)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(A)}{\partial y},$$

resp.

$$F'_x(A) = f'_u(B) \cdot u'_x(A) + f'_v(B) \cdot v'_x(A),$$
$$F'_y(A) = f'_u(B) \cdot u'_y(A) + f'_v(B) \cdot v'_y(A)$$

v alternativním zápisu parciálních derivací.

Zdůvodnění: Ukážeme si platnost prvního z uvedených vztahů. S využitím Lagrangeovy věty a při označení $u(t) = u(x_0 + t, y_0)$, $v(t) = v(x_0 + t, y_0)$ můžeme psát

$$\begin{aligned}
F'_x(x_0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + t, y_0) - F(x_0, y_0)}{t} = \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(u(x_0 + t, y_0), v(x_0 + t, y_0)) - f(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))}{t} = \\
&= \lim_{t \to 0} \left(\frac{f(u(x_0 + t, y_0), v(x_0 + t, y_0)) - f(u(x_0, y_0), v(x_0 + t, y_0))}{t} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{f(u(x_0, y_0), v(x_0 + t, y_0)) - f(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))}{t} \right) = \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(u(t), v(t)) - f(u(0), v(t)) + f(u(0), v(t)) - f(u(0), v(0))}{t} = \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f'_u(\xi, v(t)) \cdot (u(t) - u(0)) + f'_v(u(0), \eta) \cdot (v(t) - v(0))}{t} = \\
&= \lim_{t \to 0} f'_u(\xi, v(t)) \cdot \lim_{t \to 0} \frac{u(t) - u(0)}{t} + f'_v(u(0), \eta) \cdot \lim_{t \to 0} \frac{v(t) - v(0)}{t} = \\
&= f'_u(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) \cdot u'_x(x_0, y_0) + f'_v(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) \cdot v'_x(x_0, y_0),
\end{aligned}$$

kde ξ je mezi $u(t)$ a $u(0)$, η je mezi $v(t)$ a $v(0)$. Při použití pravidel pro počítání s limitami jsme využili existence a spojitosti potřebných parciálních derivací. Druhý ze vztahů bychom odvodili analogickým způsobem.

$\surd\surd$ **Komentář 2.4.2:** Vzorce pro parciální derivace složené funkce budeme zapisovat zkráceně ve tvaru

$$F'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x, \quad F'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y.$$

Při konvenci "**vynechávání čárky**" můžeme také psát

$$F_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x, \quad F_y = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y$$

nebo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\ .$$

Zejména při výpočtu parciálních derivací vyšších řádů je potřebné mít neustále na paměti skutečnost, že parciální derivace $f'_u = \partial f/\partial u$, $f'_v = \partial f/\partial v$ jsou opět složené funkce dvou proměnných, tj. $f'_u = f'_u(u(x,y), v(x,y))$, $f'_v = f'_v(u(x,y), v(x,y))$.

Příklad 2.4.1: Najděte parciální derivace z'_x, z'_y, z''_{xx} funkce $F : z = f(u(x,y), v(x,y))$ víte-li, že vnější složka $f : z = f(u,v)$ má spojité parciální derivace druhého řádu $f''_{uu}, f''_{uv}, f''_{vv}$ a $u = xy$, $v = x/y$.

Řešení:

$$F'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u \cdot (xy)'_x + f'_v \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = y f'_u + \frac{1}{y} f'_v,$$

$$F'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_u \cdot (xy)'_y + f'_v \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = x f'_u - \frac{x}{y^2} f'_v,$$

$$F''_{xx} = (F'_x)'_x = (y f'_u + \frac{1}{y} f'_v)'_x = y\,(f''_{uu} \cdot u'_x + f''_{uv} \cdot v'_x) + \frac{1}{y}\,(f''_{vu} \cdot u'_x + f''_{vv} \cdot v'_x) =$$

$$= y \cdot (f''_{uu} \cdot y + f''_{uv} \cdot \frac{1}{y}) + \frac{1}{y} \cdot (f''_{vu} \cdot y + f''_{vv} \cdot \frac{1}{y}) = y^2 \cdot f''_{uu} + 2 f''_{uv} + \frac{1}{y^2} \cdot f''_{vv}.$$

$\surd\surd$ **Komentář 2.4.3:** V případě složené funkce

$$p(x,y,z) = q(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$$

by měla pravidla pro výpočet parciálních derivací o jeden sčítanec více, tj. například $p'_z = q'_u \cdot u'_z + q'_v \cdot v'_z + q'_w \cdot w'_z$ a pro složenou funkci

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, g_n(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

n proměnných by součet obsahoval právě n sčítanců tvaru

$$\frac{\partial F(A)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(B)}{\partial g_k} \cdot \frac{\partial g_k(A)}{\partial x_i},$$

kde $A = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $B = [g_1(A), g_2(A), \dots, g_n(A)]$.

Ve zkráceném tvaru (bez uvedení bodů, v nichž máme parciální derivace uvažovat) by mělo pravidlo tvar

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial g_k} \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_i}.$$

Cvičení 2.4.2: (Předpokládáme, že existují potřebné derivace či parciální derivace uvažovaných funkcí.)

1. Najděte $\partial z/\partial x$ a $\partial z/\partial y$ funkce $z = f(u, v)$, kde $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$.

2. Ukažte, že funkce $w = f(u, v)$, kde $u = x + at$, $v = y + bt$ (a, b jsou konstanty) splňuje rovnici $w_t = aw_x + bw_y$.

3. Ukažte, že funkce $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ splňuje rovnici
$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

4. Ukažte, že funkce $z = xy + x\varphi(y/x)$ splňuje rovnici
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

5. Ukažte, že funkce $z = e^y \varphi\left(ye^{x^2/(2y^2)}\right)$ splňuje rovnici
$$(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

$\surd\surd$ **Komentář 2.4.4:** V jedné z dalších částí tohoto textu budeme pracovat se složenou funkcí $p(r, s, t) = q(x(r, s, t), y(r, s, t), z(r, s, t))$ tří proměnných ve speciálním případě, kdy jsou složky složené funkce závislé jen na jedné společné proměnné t a budeme ji zapisovat jako funkci

$$p(t) = q(x(t), y(t), z(t)),\ t \in I,$$

definovanou na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Existují-li potřebné parciální derivace vnější složky a vnitřních složek, pak podle vzorce pro derivaci složené funkce dostaneme

$$p'(t) = q'_x(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + q'_y(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + q'_z(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t). \tag{2.1}$$

Příklad 2.4.2: Vypočítejte derivaci $z'(t)$ funkce $z = e^{3x+2y}$, kde $x = \cos t$, $y = t^2$.

Řešení:

- Přímým výpočtem: složením funkcí a výpočtem derivace získáme

$$z(t) = e^{3\cos t + 2t^2} \Longrightarrow z'(t) = e^{3\cos t+2t^2} \cdot (-3\sin t + 4t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Podle vzorce pro derivaci složené funkce máme

$$z'(t) = z'_x \cdot x'(t) + z'_y \cdot y'(t) = \left(e^{3x+2y}\right)'_x \cdot (\cos t)' + \left(e^{3x+2y}\right)'_y \cdot (t^2)' =$$

$$= 3e^{3x+2y} \cdot (-\sin t) + 2e^{3x+2y} \cdot 2t = e^{3\cos t+2t^2}(4t - 3\sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cvičení 2.4.3: Vypočtěte dvěma různými způsoby $u'(t)$, když

1. $u = x/y$, kde $x = e^t, y = \ln t$.
2. $u = \ln\sin(x/\sqrt{y})$, kde $x = 3t^2, y = \sqrt{t^2+1}$.
3. $u = xyz$, kde $x = t^2 + 1, y = \ln t, z = \operatorname{tg}\, t$.
4. $u = z/\sqrt{x^2+y^2}$, kde $x = r\cos t, y = r\sin t, z = H$ a r, H jsou kladné reálné konstanty.

2.5 Totální diferenciál funkce

V teorii funkce jedné reálné proměnné byl definován pojem diferenciálu $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}f(x,h) = f'(x)h$ funkce f a jeho geometrický význam. Rovněž byl zaveden diferenciál $\mathrm{d}^k f(x,h) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{k-1} f(x,h)) = f^{(k)}(x)h^k$, řádu $k > 1$.

Totální (úplný) diferenciál funkce dvou proměnných je analogií pojmu diferenciál funkce jedné proměnné.

2.5.1 Pojem totálního diferenciálu

Uvažujme funkci f, která má spojité parciální derivace prvního řádu v nějakém okolí $O(A)$, kde $A = [x_0, y_0]$. V jedné z navazujících kapitol si ukážeme, že tečná rovina v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ ke grafu funkce f má rovnici

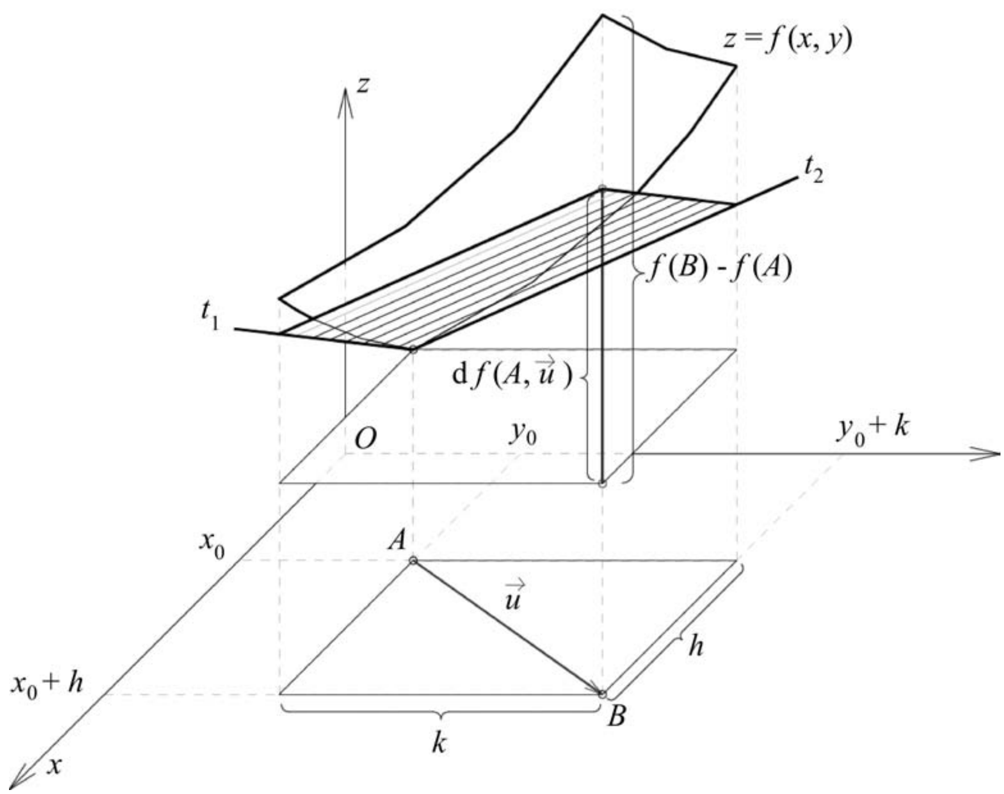
$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Nahradíme-li v blízkém okolí bodu A funkci f funkcí

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0),$$

pak mnohdy hovoříme o standardní lineární aproximaci funkce f v okolí bodu A. Zvolíme-li v okolí $O(A)$ bod $B = [x_0 + h, y_0 + k]$, pak pro přírůstek funkčních hodnot na tečné rovině platí

$$L(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k.$$



Definice 2.5.1: *Má-li funkce f v nějakém okolí $O(A) \subset \mathbb{E}_2$ bodu $A = [x_0, y_0]$ spojité parciální derivace, pak výraz*

$$\mathrm{d}f(A; \vec{u}) = f'_x(A)h + f'_y(A)k$$

nazýváme ***totálním diferenciálem*** *funkce f v bodě A pro vektor přírůstků $\vec{u} = (h, k)$ nezávisle proměnných.*

$\triangle$

Pro totální diferenciál platí tyto důležité vztahy:

$$\lim_{X \to A} \frac{f(X) - f(A)}{\mathrm{d}f(A, \vec{u})} = 1 \quad \text{kde} \quad \vec{u} = \vec{AX},$$

$$\lim_{\vec{u}\to(0,0)} \frac{f(X)-f(A)-\mathrm{d}f(A,\vec{u})}{||\vec{u}||} = 0.$$

Odtud vyplývá, že můžeme psát

$$f(X) \doteq f(A) + \mathrm{d}f(A,\vec{u}), \quad \text{kde} \quad \vec{u} = \vec{AX}.$$

Totální diferenciál funkce tří proměnných $f(x,y,z)$ v bodě $A = [x_0, y_0, z_0]$ je pro vektor přírůstků $\vec{u} = (h_1, h_2, h_3)$ definován analogickým způsobem jako

$$\mathrm{d}f(A;\vec{u}) = f'_x(A)h_1 + f'_y(A)h_2 + f'_z(A)h_3.$$

Využijeme-li nerovnosti $|a_1+a_2+a_3| \le |a_1|+|a_2|+|a_3|$, můžeme v tomto případě odhadnout absolutní chybu užitím diferenciálu takto:

$$|f(X)-f(A)| \doteq |\mathrm{d}f(A;\vec{u})| \le |f'_x(A)|\cdot|h_1| + |f'_y(A)|\cdot|h_2| + |f'_z(A)|\cdot|h_3|.$$

Příklad 2.5.1: Strany trojúhelníku byly změřeny s přesností $a = 200\,m \pm 2\,cm$, $b = 300\,m \pm 5\,cm$ a úhel γ jimi sevřený $\gamma = 60^\circ \pm 10''$. Užitím (totálního) diferenciálu určete odhad absolutní a relativní chyby, s jakou bude vypočtena strana c, vyjdeme-li z naměřených hodnot $a_0 = 200\,m$, $b_0 = 300\,m$, $\gamma_0 = 60^\circ$.

Řešení: Strana $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$ je funkcí proměnných a, b, γ a je dán bod $A = [200, 300, \pi/3]$, kde úhel γ_0 je vyjádřen v obloukové míře. Do odpovídajících jednotek přepočítáme také odchylky $h_1 = |\mathrm{d}a| = 2\,cm = 0.02\,m$, $h_2 = |\mathrm{d}b| = 5\,cm = 0.05\,m$, $h_3 = |\mathrm{d}\gamma| = 10'' = 10\pi/648000$, kde jsme použili převod jednotek $1'' = \pi/(180\cdot 60\cdot 60)$. Po výpočtu parciálních derivací c'_x, c'_y, c'_z pro totální diferenciál platí nerovnost

$$|\mathrm{d}c(A,(h_1,h_2,h_3))| \le$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_0^2+b_0^2-2a_0b_0\cos\gamma_0}}\left(|a_0-b_0\cos\gamma_0||\mathrm{d}a| + |b_0-a_0\cos\gamma_0||\mathrm{d}b| + |a_0b_0\sin\gamma_0||\mathrm{d}\gamma|\right) =$$

$$= \frac{1}{264.575}\left(50\cdot 0.02 + 200\cdot 0.05 + 200\cdot 300\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{10\pi}{648000}\right) = \frac{1+10+2.5192}{264.575} =$$

$$\doteq 0.051$$

Odhad absolutní chyby vypočtené délky $264.575\,m$ strany c je $\triangle c = \mathrm{d}c = 0.051\,m = 5.1\,cm$. Odhad relativní chyby můžeme vyjádřit jako

$$\frac{\triangle c}{c} \doteq \frac{\mathrm{d}c}{c} \doteq \frac{0.051}{264.575} \doteq 1.9\cdot 10^{-4}.$$

Relativní chyba v procentech pak je 0.019%, t.j., 0.19 $^\circ/_{\circ\circ}$ (promile).

Cvičení 2.5.1: Řešené příklady.

Vypočtěte totální diferenciál $\mathrm{d}f(A;\vec{u})$, kde $\vec{u} = \vec{AX}$, pro

1. $f(x,y) = \cos(2x^2 - 3y)$, $A = [\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, 0]$,
2. $f(x,y) = \ln\ \operatorname{cotg} \frac{y}{x}$, $A = [1, \frac{\pi}{4}]$.

Řešení:

1. $f'_x(x,y) = -4x \cdot \sin(2x^2 - 3y)$, $\quad f'_y(x,y) = 3\sin(2x^2 - 3y)$,
   $f'_x(A) = -\sqrt{\pi}$, $\quad f'_y(A) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$$\mathrm{d}f(A;\vec{u}) = -\sqrt{\pi} \cdot \left(x - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot (y - 0) = -\sqrt{\pi}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}y + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

. . . .

2. $f'_x(x,y) = \frac{1}{\operatorname{cotg} \frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{y}{x}}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{2y}{x^2 \cdot \sin \frac{2y}{x}}$,
   $f'_y(x,y) = \frac{-2}{x \cdot \sin \frac{2y}{x}}$,

$$\mathrm{d}f(A;\vec{u}) = \frac{\pi}{2} \cdot (x - 1) - 2 \cdot (y - \frac{\pi}{4}).$$

Cvičení 2.5.2: Vypočtěte totální diferenciál $\mathrm{d}f(A;\vec{u})$, kde $\vec{u} = \vec{AX}$, pro

1. $f(x,y) = e^{xy}\cos x$, $A = [\frac{\pi}{6}, 0]$,
2. $f(x,y) = \frac{1}{\operatorname{arctg}\ xy}$, $A = [1, 1]$.

Cvičení 2.5.3: Užitím totálního diferenciálu odhadněte absolutní a relativní chybu, které se dopustíme tím, že vypočteme objem kužele z naměřených hodnot poloměru podstavy $r = 20$ cm a výšky $v = 30$ cm víme-li, že poloměr byl změřen s přesností ± 0.1 mm a výška s přesností ± 0.3 mm.

2.5.2 Totální diferenciály vyšších řádů

Z označení totálního diferenciálu prvního řádu $\mathrm{d}f(X;\vec{u})$ vyplývá, že jde o funkci souřadnic bodu $X = [x, y]$ a složek přírůstkového vektoru $\vec{u} = (h, k)$, t.j., funkci čtyř proměnných x, y, h, k. Budeme-li však považovat vektor $\vec{u}$ za konstantní, pak $g(X) = \mathrm{d}f(X;\vec{u})$ je pouze funkcí dvou proměnných x, y. Při takto zvoleném $\vec{u} = (h, k)$ označme $\mathrm{d}g(X;\vec{u})$ jako $\mathrm{d}^2 f(X;\vec{u})$. Pokud má funkce f spojité parciální derivace druhého řádu v bodě X, pak platí:

$$\mathrm{d}^2 f(X;\vec{u}) =$$

$$= \mathrm{d}g(X;\vec{u}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x}h + \frac{\partial f(X)}{\partial y}k\right)h + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(X)}{\partial x}h + \frac{\partial f(X)}{\partial y}k\right)k =$$

$$= \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f(X)}{\partial y^2}k^2,$$

což lze psát ve tvaru

$$\mathrm{d}^2 f(X;\vec{u}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(X).$$

Tento zápis nám umožňuje jednoduché vyjádření totálních diferenciálů

$$\mathrm{d}^n f(X;\vec{u}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(X)$$

vyšších řádů, které definujeme "rekurentní rovnicí"

$$\mathrm{d}^n f(X;\vec{u}) = \mathrm{d}\left(\mathrm{d}^{n-1} f(X;\vec{u})\right),$$

přičemž při výpočtu totálních diferenciálů vyšších řádů stále uvažujeme tentýž vektor přírůstků $\vec{u}$. Dostáváme se tak k definici.

Definice 2.5.2: *Má-li funkce f v bodě $A = [x_0, y_0]$ spojité parciální derivace až do řádu n včetně, pak (totálním)* ***diferenciálem*** *n–**tého řádu** funkce f v bodě A pro vektor přírůstků $\vec{u} = (h, k)$ nazýváme výraz*

$$\mathrm{d}^n f(A;\vec{u}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(A).$$

△

Poznámka: Pro $n = 2, 3$ dostaneme vyjádření

$$\mathrm{d}^2 f(A;\vec{u}) = f''_{xx}(A)h^2 + 2f''_{xy}(A)hk + f''_{yy}(A)k^2,$$

$$\mathrm{d}^3 f(A;\vec{u}) = f'''_{xxx}(A)h^3 + 3f'''_{xxy}(A)h^2k + 3f'''_{xyy}(A)hk^2 + f'''_{yyy}(A)k^3.$$

Cvičení 2.5.4: Vyjádřete si sami

$$\mathrm{d}^4 f(A;\vec{u}).$$

Poznámka: Při výpočtu totálního diferenciálu $\mathrm{d}^k f(A;\vec{u})$, kde $\vec{u} = \vec{AX}$, je vhodné postupovat takto:

1. Nejprve vypočteme všechny parciální derivace k–tého řádu v přípustných obecných bodech $X = [x, y]$ (s využitím rovnosti smíšených parciálních derivací k–tého řádu).
2. Do takto vypočtených derivací dosadíme bod A.
3. Užitím binomické věty určíme koeficienty ve vyjádření $\mathrm{d}^k f(A;\vec{u})$ a za vektor $\vec{u} = (h, k)$ dosadíme $h = x - x_0$, $k = y - y_0$.

Příklad 2.5.2: Pro funkci $f : z = x^2y + \sin x$ vypočtěte

a) $\mathrm{d}^3 f(X;\vec{u})$, kde $X = [x, y]$, $\vec{u} = (h, k)$,

b) $\mathrm{d}^3 f(M;\vec{u})$, kde $M = [0, 1]$, $\vec{u} = \vec{MX}$,

c) $\mathrm{d}^3 f(M;\vec{u})$, kde $M = [0, 1]$, $\vec{u} = \vec{MN}$, $N = [0.01, 1.001]$

Řešení: Funkce $f(x, y) = x^2y + \sin x$ má spojité parciální derivace v každém bodě prostoru $\mathbb{E}_2$. Proto můžeme počítat

$$d^3 f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^3 f(x,y) =$$

$$= \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}h^3 + 3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y}h^2k + 3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2}hk^2 + \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}k^3 =$$

$$= f'''_{xxx}(x,y)h^3 + 3f'''_{xxy}(x,y)h^2k + 3f'''_{xyy}(x,y)hk^2 + f'''_{yyy}(x,y)k^3,$$

kde

$$f'_x(x,y) = 2xy + \cos x,\ \ f'_y(x,y) = x^2,$$

$$f''_{xx}(x,y) = 2y - \sin x,\ \ f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 2x,\ \ f''_{yy}(x,y) = 0,$$

$$f'''_{xxx}(x,y) = -\cos x,\ \ f'''_{xxy}(x,y) = f'''_{xyx}(x,y) = f'''_{yxx}(x,y) = 2,$$

$$f'''_{xyy}(x,y) = f'''_{yxy}(x,y) = f'''_{yyx}(x,y) = 0,\ \ f'''_{yyy}(x,y) = 0.$$

Odtud

$$f'''_{xxx}(0,1) = -1,\ \ f'''_{xxy}(0,1) = 2,\ \ f'''_{xyy}(0,1) = 0,\ \ f'''_{yyy}(0,1) = 0.$$

Je tedy

a) $d^3 f(X;\vec{u}) = f'''_{xxx}(x,y)h^3 + 3f'''_{xxy}(x,y)h^2k + 3f'''_{xyy}(x,y)hk^2 + f'''_{yyy}(x,y)k^3 =$

$$= -\cos x \cdot h^3 + 3 \cdot 2 \cdot h^2k + 3 \cdot 0 \cdot hk^2 + 0 \cdot k^3 = -\cos x \cdot h^3 + 6h^2k,$$

b) $\vec{u} = \vec{MX} = (x, y-1) = (h, k)$ a tedy

$$d^3 f(M,\vec{u}) = -h^3 + 6h^2k = -x^3 + 6x(y-1),$$

c) $\vec{u} = \vec{MN} = (10^{-2}, 10^{-3}) = (h, k)$ a proto

$$d^3 f(M,\vec{u}) = -h^3 + 6h^2k = -(10^{-2})^3 + 6(10^{-2})^2 10^{-3} = -10^{-6} + 6\cdot 10^{-7} = -4\cdot 10^{-7}.$$

Cvičení 2.5.5: Pro zadanou funkci vypočítejte diferenciál předepsaného řádu:

1. $f(x,y) = \ln(x-y)$, $\quad \mathrm{d}^2 f$,
2. $f(x,y) = x^2 \cdot \cos^2 y$, $\quad \mathrm{d}^2 f$,
3. $f(x,y) = \sin(x-2y)$, $\quad \mathrm{d}^3 f$.

2.5.3 Taylorova věta

Podobně jako u funkce jedné proměnné můžeme při splnění potřebných předpokladů i u funkce dvou proměnných nahradit zadanou funkci polynomem dvou proměnných, který má s funkcí f v daném bodě stejnou funkční hodnotu a stejné hodnoty všech parciálních derivací až do řádu n, kde n je stupeň polynomu. Pro funkci dvou proměnných platí toto tvrzení – Taylorova věta.

Tvrzení: *Má-li funkce f v bodě $A = [x_0, y_0]$ a nějakém okolí $O(A)$ spojité parciální derivace až do řádu $n+1$ včetně, pak pro každý bod $X = [x, y] \in O(A)$ platí*

$$f(X) = T_n(f, A; \vec{u}) + R_n(f, A; \vec{u}),$$

*kde T_n je **Taylorův polynom** n–**tého stupně** a R_n je zbytek, přičemž*

$$T_n(f, A; \vec{u}) = f(A) + \frac{1}{1!}\mathrm{d}f(A; \vec{u}) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(A; \vec{u}) + \cdots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(A; \vec{u}),$$

$$R_n(f, A; \vec{u}) = \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}^{n+1} f(\tilde{A}; \vec{u}),$$

kde $\vec{u} = \vec{AX}$, $\tilde{A} = A + \theta\vec{u}$, $\theta \in (0, 1)$.

Uvažujeme-li bod $A = [0, 0]$, pak používáme termín *Maclaurinův polynom* namísto *Taylorův polynom*, analogicky situaci u funkce jedné reálné proměnné.

Poznámky ke vzorci:

1. Označíme-li $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$,
pak $F(0) = f(x_0, y_0)$, $F(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$. Pomocí Taylorova vzorce pro funkci jedné proměnné dostáváme

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\vartheta),$$

kde $\vartheta \in (0, 1)$. Označíme-li $x = x_0 + th$, $y = y_0 + tk$, pak podle věty o derivaci složené funkce platí

$$F'(t) = f'_x(x, y)h + f'_y(x, y)k,$$

$$F''(t) = \big(f'_x(x, y)h + f'_y(x, y)k\big)'_x h + \big(f'_x(x, y)h + f'_y(x, y)k\big)'_y k =$$

$$= f''_{xx}(x, y)h^2 + 2f''_{xy}(x, y)hk + f''_{yy}(x, y)k^2.$$

Odtud

$$F'(0) = f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k = \mathrm{d}f(A; \vec{u}),$$

$$F''(0) = f''_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)hk + f''_{yy}(x_0, y_0)k^2 = \mathrm{d}^2 f(A; \vec{u}),$$

kde $A = [x_0, y_0]$. Lze odvodit, že platí

$$F^{(n)}(0) = \mathrm{d}^n f(A; \vec{u}).$$

Dosazením těchto výrazů do výše uvedeného Taylorova vzorce pro funkci jedné proměnné obdržíme hledaný tvar Taylorova polynomu pro funkci dvou proměnných.

2. Pro zbytek R_n v Taylorově větě platí vztah

$$\lim_{\vec{u}\to\vec{o}} \frac{f(X) - T_n(f, A, \vec{u})}{||\vec{u}||^n} = \lim_{\vec{u}\to\vec{o}} \frac{R_n(f, A, \vec{u})}{||\vec{u}||^n} = 0.$$

Vzorec můžeme interpretovat tak, že zbytek Taylorova polynomu pro $\vec{u} \to \vec{o}$ konverguje k nule rychleji, než n–tá mocnina normy vektoru přírůstků.

Příklad 2.5.3: Najděte Taylorův polynom $T_3(f, A, \vec{u})$ třetího stupně funkce

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2 + 3y^2 - 3xy^2 + 12xy - 9x - 11y + 9$$

pro $A = [1, 2]$, $\vec{u} = \vec{AX}$. Odhadněte zbytek $R_3(f, A, \vec{u})$.

Řešení : Ve zjednodušeném zápisu si vyjádříme vzorec Taylorovy věty jako

$$f(x, y) \doteq f(A) + \mathrm{d}f(A; \vec{u}) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(A; \vec{u}) + \cdots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(A; \vec{u}),$$

kde $\mathrm{d}^p f(A; \vec{u}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^p f(A)$, $h = x - 1$ a $k = x - 2$. Pak

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2 + 3y^2 - 3xy^2 + 12xy - 9x - 11y + 9 \Rightarrow f(1, 2) = 0,$$

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 3x^2 - 6x - 3y^2 + 12y - 9 &&\Rightarrow f'_x(1, 2) = 0,\\ f'_y(x, y) &= 6y - 6xy + 12x - 11 &&\Rightarrow f'_y(1, 2) = 1,\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}f(A; \vec{u}) = 0h + 1k = k = y - 2.$$

Podobně

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= 6x - 6 &&\Rightarrow f''_{xx}(1, 2) = 0,\\ f''_{xy}(x, y) &= -6y + 12 &&\Rightarrow f''_{xy}(1, 2) = 0,\\ f''_{yy}(x, y) &= 6 - 6x &&\Rightarrow f''_{yy}(1, 2) = 0,\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}^2 f(A; \vec{u}) = 0h^2 + 2 \cdot 0hk + 0k^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} f'''_{xxx}(x, y) &= 6 &&\Rightarrow f'''_{xxx}(1, 2) = 6,\\ f'''_{xxy}(x, y) &= 0 &&\Rightarrow f'''_{xxy}(1, 2) = 0,\\ f'''_{xyy}(x, y) &= -6 &&\Rightarrow f'''_{xyy}(1, 2) = -6,\\ f'''_{yyy}(x, y) &= 0 &&\Rightarrow f'''_{yyy}(1, 2) = 0,\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}^3 f(A; \vec{u}) = 6h^3 + 3 \cdot 0h^2k - 3 \cdot 6hk^2 + 0k^3 = 6(x - 1)^3 - 18(x - 1)(y - 2)^2.$$

Všechny parciální derivace čtvrtého řádu jsou již v bodě $A = [1, 2]$ a jeho okolí nulové, proto je

$$R_3(f, A, \vec{u}) = \frac{1}{4!}\mathrm{d}^4 f(\tilde{A}; \vec{u}) = 0.$$

Platí tedy

$$f(x, y) = 9y - 20 - 3(x - 1)(y - 2)^2 + (x - 1)^3.$$

Nyní uvedeme příklad ilustrující vyjádření chyby v Taylorově větě.

Příklad 2.5.4: Funkci $f(x,y) = e^x \sin y$ nahraďte Maclaurinovým polynomem třetího stupně a odhadněte chybu (velikost zbytku).

Řešení : Existují spojité parciální derivace v okolí $O([0,0])$, $h = x - 0 = x$, $k = y - 0 = y$, proto

$$\begin{array}{llll}
f(x,y) = e^x \sin y & |_{[0,0]} = 0, & & \\
f'_x(x,y) = e^x \sin y & |_{[0,0]} = 0, & f'_y(x,y) = e^x \cos y & |_{[0,0]} = 1, \\
f''_{xx}(x,y) = e^x \sin y & |_{[0,0]} = 0, & f''_{xy}(x,y) = e^x \cos y & |_{[0,0]} = 1, \\
f''_{yy}(x,y) = -e^x \sin y & |_{[0,0]} = 0, & & \\
f'''_{xxx}(x,y) = e^x \sin y & |_{[0,0]} = 0, & f'''_{xxy}(x,y) = e^x \cos y & |_{[0,0]} = 1, \\
f'''_{xyy}(x,y) = -e^x \sin y & |_{[0,0]} = 0, & f'''_{yyy}(x,y) = -e^x \cos y & |_{[0,0]} = -1.
\end{array}$$

Pak $\mathrm{d}f(0,0) = k = y$, $\mathrm{d}^2 f(0,0) = 2hk = 2xy$, $\mathrm{d}^3 f(0,0) = 3h^2k - y^3 = 3x^2y - y^3$ a platí

$$f(x,y) = e^x \sin y = 0 + \frac{1}{1!}y + \frac{1}{2!}2xy + \frac{1}{3!}(3x^2y - y^3) + R_3 = y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 + R_3,$$

kde

$$R_3 = \frac{1}{4!}\mathrm{d}^4 f(\theta x, \theta y) \text{ pro } 0 < \theta < 1.$$

Pomocí parciálních derivací

$$\begin{array}{lll}
f^{(4)}_{xxxx}(x,y) = e^x \sin y, & f^{(4)}_{xxxy}(x,y) = e^x \cos y, & f^{(4)}_{xxyy}(x,y) = -e^x \sin y, \\
f^{(4)}_{xyyy}(x,y) = -e^x \cos y, & f^{(4)}_{yyyy}(x,y) = e^x \sin y &
\end{array}$$

čtvrtého řádu můžeme odhadnout v absolutní hodnotě

$$|\mathrm{d}^4 f(\theta x, \theta y)| =$$

$$= |e^{\theta x} \sin \theta y \cdot x^4 + 4e^{\theta x} \cos \theta y \cdot x^3 y - 6e^{\theta x} \sin \theta y \cdot x^2y^2 - 4e^{\theta x} \cos \theta y \cdot xy^3 + e^{\theta x} \sin \theta y \cdot y^4| =$$

$$= e^{\theta x}|((x^4 - 6x^2y^2 + y^4)\sin \theta y + 4xy(x^2 - y^2)\cos \theta y)| \leq$$

$$\leq e^{\theta x}(|x^4 - 6x^2y^2 + y^4| + 4|x||y||x^2 - y^2|).$$

Při podmínce $0 < \theta < 1$ platí $e^{\theta x} < e^0 = 1$ pro $x < 0$ a $e^{\theta x} < e^x$ pro $x > 0$.

Chybu R_3 můžeme proto pro vektor přírůstků $\vec{u} = (h,k) = (x,y)$ odhadnout vzorci

$$|R_3| < \begin{cases} \frac{1}{24}\left(|x^4 - 6x^2y^2 + y^4| + 4|x||y||x^2 - y^2|\right) & \text{pro } x < 0, \\ \frac{1}{24}e^x\left(|x^4 - 6x^2y^2 + y^4| + 4|x||y||x^2 - y^2|\right) & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Cvičení 2.5.6: Pro funkci f najděte Taylorův polynom stupně n v bodě A, když

1. $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 3x + 2xy + 1,\ n = 3,\ A = [1,-1]$,
2. $f(x,y) = \frac{y^2}{x^3},\ n = 2,\ A = [-1,1]$,
3. $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2),\ n = 4,\ A = [0,0]$.

Kontrolní otázky

- Co rozumíme okolím bodu v $\mathbb{E}_2$?
- Charakterizujte vlastnosti množin v $\mathbb{E}_2$: množina otevřená, uzavřená, ohraničená, souvislá. Co je to oblast v $\mathbb{E}_2$?
- Kdy konverguje posloupnost bodů $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ v $\mathbb{E}_2$ k bodu $A \in \mathbb{E}_2$?
- Kdy má funkce f v bodě $A \in \mathbb{E}_2$ limitu rovnou číslu $b \in \mathbb{R}$?
- Jak se definuje spojitost funkce f v bodě $A \in \mathbb{E}_2$?
- Zformulujte Weierstrassovu a Bolzanovu větu.
- Zapište limitu, která určuje $f'_x(x_0, y_0)$. Znázorněte geometrický význam této parciální derivace.
- Plyne z existence parciálních derivací $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ spojitost funkce f v bodě $A = [x_0, y_0]$? Zdůvodněte odpověď.
- Zapište $f''_{yy}(x_0, y_0)$ užitím limity.
- Kdy platí, že $f''_{xy} = f''_{yx}$ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$?
- Zapište Lagrangeovu větu pro funkci dvou proměnných.
- Uveďte vztahy pro parciální derivace 1. řádu funkce
  $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ v bodě A.
- Jak lze geometricky interpretovat totální diferenciál $\mathrm{d}f(A; \vec{u})$?
- Uveďte vztah pro výpočet $\mathrm{d}^n f(A; \vec{u})$.
- Užitím totálního diferenciálu vyjádřete Taylorův polynom n–tého stupně funkce f v bodě $A = [x_0, y_0]$. Co tvrdí Taylorova věta? Uveďte předpoklady pro její platnost.
- Co je to Maclaurinův polynom?

Výsledky cvičení, testy ke zpracování

Cvičení 2.1.2

Výsledky uvádíme ve tvaru nerovnic, z nichž je již možné provést geometrické znázornění definičních oborů.

1) $\quad -1 + 4k < x^2 + y^2 < 1 + 4k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$,

2) $\quad x^2 + y^2 - 6y \leq 0$ a současně $x^2 + y^2 - 4y > 0$,

. . . .

Cvičení 2.2.1

1. $\frac{10}{3}$, 2. neexistuje, 3. 8, 4. 9

. . . .

Cvičení 2.2.2

1. Funkce f není spojitá v bodě A, hodnotu funkce f v bodě A stačí změnit na $f(1,2) = \frac{4}{5}$.

2. $f(0,0) = 1$

3. Funkce f není spojitá v bodě A.

. . . .

Cvičení 2.3.1

$f'_x(A) = \frac{3}{8}$, $f'_y(A) = -\frac{1}{12}$

. . . .

Cvičení 2.3.2

1. $f'_x(x,y) = \frac{2x}{y} - \frac{3y}{x^4}, \qquad f'_y(x,y) = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{x^3},$

$$D(f) = D(f'_x) = D(f'_y) = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x \neq 0, y \neq 0\}$$

2. $f'_x(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad f'_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},$

$$D(f) = D(f'_x) = D(f'_y) = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ x \neq 0\}$$

3. $f'_x(x,y) = \frac{1}{y} e^{x/y} \cos y, \qquad f'_y(x,y) = e^{x/y} \left(-\frac{x}{y^2} \cos y - \sin y\right),$

$$D(f) = D(f'_x) = D(f'_y) = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2;\ y \neq 0\}$$

. . . .

Cvičení 2.3.3

1. $f''_{xx}(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{xy}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{yy}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$
2. $f'''_{xxy}(x,y) = 4\sin 2x \cdot \sin y,$
3. $f'''_{xyy}(x,y) = -2x \cdot \cos xy + yx^2 \cdot \sin xy.$

. . . .

Cvičení 2.5.2

1. $\mathrm{d}f(A;\vec{u}) = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}y + \frac{\pi}{12},$
2. $\mathrm{d}f(A;\vec{u}) = -\frac{8}{\pi^2}(x+y-2).$

. . . .

Cvičení 2.5.3

$$\Delta V \doteq \mathrm{d}V = 8\pi \ \mathrm{dm}^3, \quad \frac{\Delta V}{V} \doteq 2\ {}^\circ\!/_{\circ\circ}.$$

. . . .

Cvičení 2.5.5

1. $\mathrm{d}^2 f(X,\vec{u}) = -\frac{(h-k)^2}{(x-y)^2},$
2. $\mathrm{d}^2 f(X,\vec{u}) = 2\cos^2 y \cdot h^2 - 4x\sin 2y \cdot h \cdot k - 2x^2 \cos 2y \cdot k^2,$
3. $\mathrm{d}^3 f(X,\vec{u}) = -\cos(x-2y) \cdot (h-2k)^3.$

. . . .

Cvičení 2.5.6

1. $T_3(f,A;\vec{u}) = -2-(x-1)+3(x-1)^2+(y+1)^2+(x-1)^3+(x-1)(y+1)^2,$
2. $T_2(f,A;\vec{u}) = -1-3(x+1)+2(y-1)-6(x+1)^2-6(x+1)(y-1),$
3. $T_4(f,A;\vec{u}) = 1-\frac{1}{2}(x^4+y^4)-x^2y^2.$

. . . .

Test 1

Jméno a příjmení: ______________________________
Adresa: ______________________________
E-mail: ______________________________
Telefon: ______________________________

1. *Načrtněte kartézské grafy definičních oborů funkcí:*

   a) $z = \sqrt{x - y^2} \ln \sin(x + y)$,

   b) $z = \arccos \frac{x}{x+y}$.

2. *Ukažte, že funkce* $z(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$ *vyhovuje Laplaceově rovnici* $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.

3. *Zjistěte, zda funkce*

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}, \quad a \neq 0,$$

   vyhovuje parciální diferenciální rovnici pro vedení tepla $u''_{xx} - \frac{1}{a^2} u'_t = 0$.

4. *Vypočtěte* $\mathrm{d}^2 f(A; \vec{u})$, *je-li:*

   a) $f : z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$, $A = [-1; 2]$, $\vec{u} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$,

   b) $f : z = x^y$ $A = [x_0; y_0]$, $B = [x; y]$, $\vec{u} = \vec{AB}$.

5. *Zjistěte, zda funkce* $z(x, y) = x \cdot g(y^2 - x^2)$, *která má spojité parciální derivace* 1. *řádu, vyhovuje parciální diferenciální rovnici*

$$\frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{1}{x^2} z.$$

6. *Dokažte, že funkce* $u(x, y, z) = x \cdot y \cdot g(x^2 - y^2 - z^2)$ *(kde* g *má spojité parciální derivace* 1. *řádu), vyhovuje parciální diferenciální rovnici*

$$\frac{1}{2x} u'_x - \frac{1}{2y} u'_y + \frac{1}{z} u'_z = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) \cdot u.$$

7. *Určete Taylorův polynom funkce* $z = f(x, y)$ *stupně* n *v bodě* A, *je-li:*

   a) $z = x^y$, $A = [1; 1]$, $n = 3$,

   b) $z = \cos x \cdot \cos y$, $A = [\pi/4; \pi/4]$, $B = [x; y]$, $n = 3$.

8. *Určete Maclaurinův polynom funkce* $z = f(x, y)$ *stupně* n, *je-li:*

   a) $z = \frac{\cos x}{\cos y}$, $n = 2$,

   b) $z = e^x \ln(1 + y)$, $n = 3$.

Tabulka hodnocení

1. a	1.b	2.	3.	4. a	4. b	5.	6.	7. a	7. b	8. a	8. b	Σ
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	body

Opravil:

Rejstřík

Literatura

[1] Anton H., *Calculus with Analytic Geometry*, John Wiley, 1995.

[2] Brabec J., Hrůza B., *Matematická analýza* II, SNTL, Praha 1986.

[3] Čermáková H. a kolektiv, *Sbírka příkladů z matematiky* II, VUT, FAST, CERM, Brno 2003.

[4] Došlá Z., Došlý O., *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno 1999.

[5] Drábek P., Míka S., *Matematická analýza* II, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň 1999.

[6] Eliaš J., Horváth J., Kajan J. *Zbierka úloh z vyššej matematiky*, 3. časť, Alfa, Bratislava 1971 (2. vydanie).

[7] Ivan J., *Matematika* II, Alfa, Bratislava 1989.

[8] Karásek J., *Matematika* II, VUT, FSI, CERM, Brno 2002.

[9] Kluvánek J., Mišík L., Švec M., *Matematika* I, SVTL, Bratislava 1959.